Rodrigues参数的推广形式*

陈记争** 袁建平 方 群
西北工业大学航天学院，西安 710072

摘要 介绍了国内外关于 Rodrigues 参数改进方法及其应用的研究现状. 在此基础上，提出了 Rodrigues 参数的第一推广形式. 现有的射影参数和广义 Rodrigues 参数都是其特例，为统一研究由 Rodrigues 参数推广而来的各种三参数姿态描述方法提供理论基础. 然后，从第一推广形式这一族姿态描述参数中选取一个子族，即 Rodrigues 参数的第二推广形式. 文中给出了第二推广形式与四元数的关系及第二推广形式表示的姿态运动学方程，并讨论了解决 Rodrigues 参数的第二推广形式奇异性的方法，为飞行器姿态确定和控制算法设计提供了理论基础.

关键词 Rodrigues参数 射影参数 广义 Rodrigues 参数 奇异性

航空航天技术的发展，对姿态确定算法的精度和快速性提出了更高的要求. 然而传统的 Euler 角方法和四元数方法均表现出一定的局限性. Euler 角方法因涉及大量三角运算而实时性不高，并且存在奇异性问题. 四元数方法是一种综合性能较高的方法，然而，四元数并不是姿态描述的最小实现，存在一个约束条件，这种冗余特性决定了其在姿态确定中必然会遇到一些问题：（1）四元数必须进行规范化[1]；（2）四元数的状态误差协方差矩阵是奇异的[2,3].

Rodrigues 参数作为一种三参数姿态描述方法，因具有简洁、高效的特点而逐渐受到人们的重视[4—17]. 然而当绕 Euler 轴的旋转角为π 时，Rodrigues 参数出现奇异性，限制了它的广泛应用. 近年来，出现了多种对 Rodrigues 参数的改进方法. Schaub 等通过将姿态四元数的约束单位球射影投影到一个三维超平面上得到了一族包括经典 Rodrigues 参数和修正 Rodrigues 参数在内的姿态描述参数[4]，他们称这族参数为射影参数(stereographic parameters)，根据投影平面的不同，射影参数分为对称射影参数和非对称射影参数. Crassidis 等提出了广义 Rodrigues 参数(generalized Rodrigues parameters)[5]. 广义 Rodrigues 参数实际上是对称射影参数放大了一个倍数，其优点为适当地选择放大倍数可以使广义 Rodrigues 参数在小角度条件下近似为 Euler 角. 射影参数和广义 Rodrigues 参数虽然推广了经典 Rodrigues 参数，但是一般情况下射影参数或广义 Rodrigues 参数的姿态运动学方程相对于经典 Rodrigues 参数比较复杂. 方群等提出了包括经典 Rodrigues 参数在内的 4 套姿态描述参数[6]，这 4 套参数的姿态运动学方程比较简洁并且形式完全相同，利用这 4 套参数相互切换可以方便地解决奇异性问题.

Rodrigues 参数及其改进的姿态参数在飞行器姿态确定中得到了一定的应用，并取得了良好的效果. Idan 利用 Rodrigues 参数进行姿态估计[7]，指出 Rodrigues 参数方法比四元数方法减小 35%—45%的计算量. 周江华等利用 Rodrigues 参数构造的捷联姿态算法相对于四元数算法效率提高了一倍[8]. 林玉荣等利用 Gibbs 矢量(Rodrigues 参数)研究了卫星轨道姿态的滤波算法[9]，仿真结果表明 Gibbs 矢量法的运行效率明显高于 Euler 角方法.

2007-06-25 收稿，2007-12-12 收修改稿
* 国家自然科学基金资助项目(批准号：10572114)
** E-mail：chjizheng@yahoo.com.cn

Mortari 等基于 Rodrigues 参数提出了最优线性姿态估计器（optimal linear attitude estimator, OLAE）[10]，并验证了它是最快的最优姿态估计算法之一. 程杨等提出了一种基于修正 Rodrigues 参数的姿态估计算法[11]，利用切换方法解决了修正 Rodrigues 参数的奇异性问题，并利用数值算例验证了算法的可行性. Jiang 等在估计飞行器姿态时利用广义 Rodrigues 参数描述姿态[12]，避免利用四元数时出现状态误差协方差矩阵奇异的问题. 另外，Rodrigues 参数及其改进的姿态参数在飞行器姿态控制中也取得了一些成功的应用（详见文献 [13—16]）. 研究表明，Rodrigues 参数及其改进的姿态参数在飞行器姿态确定和控制中有很好的应用前景.

本文进一步推广 Rodrigues 参数，得到一族姿态描述参数，称其为 Rodrigues 参数的第一推广形式. 现有的射影参数、广义 Rodrigues 参数以及方群等提出的 4 套姿态描述参数都是其特例. 从而可以在更一般意义下研究由 Rodrigues 参数推广而来的各种三参数姿态描述方法，为飞行器姿态确定和控制算法的设计提供理论基础. 另外，从第一推广形式这一族姿态描述参数中选取了一个子族，即 Rodrigues 参数的第二推广形式. 第二推广形式比较简洁，并且能方便地解决奇异性问题，是一种应用前景很好的姿态描述方法.

1 四元数与 Rodrigues 参数

刚体定点转动的 Euler 定理是研究姿态描述方法的基础. 设 $\boldsymbol{n} = [n_1 \quad n_2 \quad n_3]^{\mathrm{T}}$ 为 Euler 轴上的单位矢量，θ 为绕 $\boldsymbol{n}$ 的旋转角，则四元数 $\boldsymbol{q} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4]^{\mathrm{T}}$ 定义为[17]

$$\begin{cases} q_i = n_i \sin(\theta/2) \quad i = 1, 2, 3 \\ q_4 = \cos(\theta/2) \end{cases} \tag{1}$$

由定义可知四元数满足约束条件

$$q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = 1 \tag{2}$$

设 ω 为本体坐标系相对于参考坐标系的角速度在本体坐标系中的投影，则四元数表示的姿态运动学方程为[17]

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \frac{1}{2}\Omega(\omega)\boldsymbol{q} \tag{3}$$

其中

$$\Omega(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 & \omega_2 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 & \omega_3 \\ -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 & 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Rodrigues 参数 $\Phi = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3]^{\mathrm{T}}$ 定义为[8, 17]

$$\Phi = \tan(\theta/2)\boldsymbol{n} \tag{5}$$

设 Φ 的模为 ϕ，当 $\theta \to \pi$ 时，$\phi \to \infty$，此时无法进行姿态解算，这就是 Rodrigues 参数的奇异性问题，也是限制它广泛应用的关键问题.

Rodrigues 参数表示的姿态运动学方程为[8, 17]

$$\dot{\Phi} = \frac{1}{2}\{\omega + \Phi \times \omega + (\Phi \circ \omega)\Phi\} \tag{6}$$

由(1)和(5)式可得 Rodrigues 参数和四元数的关系为

$$\phi_i = q_i / q_4 \quad i = 1, 2, 3 \tag{7}$$

$$\begin{cases} q_i = \pm \phi_i / \sqrt{1 + \phi^2} \quad i = 1, 2, 3 \\ q_4 = \pm 1 / \sqrt{1 + \phi^2} \end{cases} \tag{8}$$

2 Rodrigues 参数的第一推广形式

定义 Rodrigues 参数的第一推广形式 $\boldsymbol{G} = [G_1 \quad G_2 \quad G_3]^{\mathrm{T}}$ 如下：

$$G_1 = f\frac{(1 - a^2 - b^2 - c^2)q_1 - 2aq_4 - 2bq_3 + 2cq_2}{d + (1 - a^2 - b^2 - c^2)q_4 + 2(aq_1 + bq_2 + cq_3)} \tag{9a}$$

$$G_2 = f\frac{(1 - a^2 - b^2 - c^2)q_2 - 2bq_4 - 2cq_1 + 2aq_3}{d + (1 - a^2 - b^2 - c^2)q_4 + 2(aq_1 + bq_2 + cq_3)} \tag{9b}$$

$$G_3 = f\frac{(1 - a^2 - b^2 - c^2)q_3 - 2cq_4 - 2aq_2 + 2bq_1}{d + (1 - a^2 - b^2 - c^2)q_4 + 2(aq_1 + bq_2 + cq_3)} \tag{9c}$$

其中 a，b，c，d，f 为实常数.

当 $a=b=c=d=0$，$f=1$ 时，$\boldsymbol{G}$ 就是经典 Rodrigues 参数．当 $a=b=c=0$，$d=f=1$ 时，$\boldsymbol{G}$ 就是修正 Rodrigues 参数．当 $a=b=c=0$ 时，$\boldsymbol{G}$ 就是广义 Rodrigues 参数．当 $a=b=c=0$，$f=1$ 时，$\boldsymbol{G}$ 就是对称射影参数．当 a，b，c 中有一个等于 1，其余两个为 0，且 $f=1$ 时，$\boldsymbol{G}$ 就是非对称射影参数．由此可见，Rodrigues 参数的第一推广形式 $\boldsymbol{G}$ 代表了一族姿态描述参数，给定 a，b，c，d，f 的一组值就得到一种姿态描述参数，从而为统一研究由 Rodrigues 参数推广而来的各种三参数姿态描述方法提供了理论基础．

由(3)式及(9a)—(9c)式推导可得 Rodrigues 参数的第一推广形式表示的姿态运动学方程，其一般形式比较复杂，不适合直接应用，这里不再列出．但是第一推广形式包含了一些重要而实用的特例，需要进行研究．其中一例是修正 Rodrigues 参数及其影子参数，利用修正 Rodrigues 参数与其影子参数相互切换可以避免奇异性，文献 [4，11，15，17] 给出了其原理及应用．下面重点讨论第一推广形式的另一个特例，即 Rodrigues 参数的第二推广形式．

3 Rodrigues 参数的第二推广形式

3.1 第二推广形式的定义

在 Rodrigues 参数的第一推广形式 $\boldsymbol{G}$ 中取 $d=0$，$f=1$ 得 Rodrigues 参数的第二推广形式 $\boldsymbol{g}=[g_1\quad g_2\quad g_3]^{\mathrm{T}}$ 为：

$$g_1=\frac{(1-a^2-b^2-c^2)q_1-2aq_4-2bq_3+2cq_2}{(1-a^2-b^2-c^2)q_4+2(aq_1+bq_2+cq_3)} \tag{10a}$$

$$g_2=\frac{(1-a^2-b^2-c^2)q_2-2bq_4-2cq_1+2aq_3}{(1-a^2-b^2-c^2)q_4+2(aq_1+bq_2+cq_3)} \tag{10b}$$

$$g_3=\frac{(1-a^2-b^2-c^2)q_3-2cq_4-2aq_2+2bq_1}{(1-a^2-b^2-c^2)q_4+2(aq_1+bq_2+cq_3)} \tag{10c}$$

(10a)—(10c)式实际上是(7)式的推广，当 $a=b=c=0$ 时，(10a)—(10c)式将退化为(7)式，$\boldsymbol{g}$ 就是经典 Rodrigues 参数．

3.2 第二推广形式与四元数的关系

四元数向第二推广形式的转换公式见(10a)—(10c)式，第二推广形式向四元数的转换公式如下：

$$q_1=\pm\frac{(1-a^2-b^2-c^2)g_1+2a-2cg_2+2bg_3}{(1+a^2+b^2+c^2)\sqrt{1+g_1^2+g_2^2+g_3^2}} \tag{11a}$$

$$q_2=\pm\frac{(1-a^2-b^2-c^2)g_2+2b-2ag_3+2cg_1}{(1+a^2+b^2+c^2)\sqrt{1+g_1^2+g_2^2+g_3^2}} \tag{11b}$$

$$q_3=\pm\frac{(1-a^2-b^2-c^2)g_3+2c-2bg_1+2ag_2}{(1+a^2+b^2+c^2)\sqrt{1+g_1^2+g_2^2+g_3^2}} \tag{11c}$$

$$q_4=\pm\frac{(1-a^2-b^2-c^2)-2(ag_1+bg_2+cg_3)}{(1+a^2+b^2+c^2)\sqrt{1+g_1^2+g_2^2+g_3^2}} \tag{11d}$$

3.3 第二推广形式的姿态运动学方程

由(3)式及(10a)—(10c)式推导可得第二推广形式满足如下方程

$$\dot{\boldsymbol{g}}=\frac{1}{2}\{\omega+\boldsymbol{g}\times\omega+(\boldsymbol{g}\circ\omega)\boldsymbol{g}\} \tag{12}$$

比较(12)式和(6)式知 Rodrigues 参数的第二推广形式和经典 Rodrigues 参数的姿态运动学方程完全相同．因此，在积分姿态运动学方程时，第二推广形式相对于经典 Rodrigues 参数没有增加计算量，这是第二推广形式的一大优点．另外第二推广形式的奇异性问题可以方便地解决，详细讨论如下．

3.4 第二推广形式的奇异性及解决方法

由(10a)—(10c)式的定义可知，当

$$(1-a^2-b^2-c^2)q_4+2(aq_1+bq_2+cq_3)=0 \tag{13}$$

时，$\boldsymbol{g}$ 的模 g 为无穷大，出现奇异现象．

Rodrigues 参数的第二推广形式 $\boldsymbol{g}$ 代表了一族姿态描述参数，给定 a，b，c 的一组值就得到一种姿态描述参数．因此，当 $\boldsymbol{g}$ 接近奇异点，即 g 比较大时，可以选择另外一组值 a'，b'，c' 代替 a，b，c，使得(13)式不成立且 g 比较小，从而避免第二

推广形式的奇异性. 有多种方法可以实现此目的, 当限定 a, b, c 的值只能取0或1时, 文献 [6] 给出了一种避免奇异性的方法. 下面确定 a', b', c' 使 $g=0$.

令(10a)—(10c)式中的分子为0, 可以解得

$$a'=\frac{q_1}{1+q_4}, b'=\frac{q_2}{1+q_4}, c'=\frac{q_3}{1+q_4} \tag{14}$$

或

$$a'=\frac{-q_1}{1-q_4}, b'=\frac{-q_2}{1-q_4}, c'=\frac{-q_3}{1-q_4} \tag{15}$$

当取(14)式时, 由(10a)—(10c)式得

$$g_1=g_2=g_3=\frac{0}{2(1+q_4)} \tag{16}$$

当取(15)式时, 由(10a)—(10c)式得

$$g_1=g_2=g_3=\frac{0}{2(q_4-1)} \tag{17}$$

根据(16)和(17)式, 为了防止出现“$\frac{0}{0}$”的情况, 当 $q_4\geqslant 0$ 时取(14)式, 当 $q_4<0$ 时取(15)式, 所以取

$$a'=\frac{\operatorname{sign}(q_4)q_1}{1+|q_4|}, b'=\frac{\operatorname{sign}(q_4)q_2}{1+|q_4|}, c'=\frac{\operatorname{sign}(q_4)q_3}{1+|q_4|} \tag{18}$$

其中 sign(∘)为符号函数, 即

$$\operatorname{sign}(q_4)=\begin{cases}1 & (q_4\geqslant 0)\\ -1 & (q_4<0)\end{cases} \tag{19}$$

3.5 第二推广形式在捷联惯导姿态解算中的应用

对捷联惯导而言, 目前最常用的捷联姿态算法为四元数算法[18]. 利用 Rodrigues 参数的第二推广形式可以方便地建立递推形式的捷联姿态算法. 设在第 k 步飞行器的姿态用第二推广形式表示为 $\boldsymbol{g}_k$, 从第 $k-1$ 步到第 k 步时间内飞行器姿态运动的等效转动矢量[18]为 $\Delta\varphi_k$, 其模为 $\Delta\varphi_k$. 由(10a)—(10c)式以及四元数乘法推导可得如下捷联姿态算法

$$\begin{cases}\boldsymbol{g}_k=\dfrac{\boldsymbol{g}_{k-1}+\Delta\Phi_k+\boldsymbol{g}_{k-1}\times\Delta\Phi_k}{1-(\boldsymbol{g}_{k-1}\Delta\Phi_k)}\\ \Delta\Phi_k=\dfrac{\tan(\Delta\varphi_k/2)}{\Delta\varphi_k}\Delta\varphi_k\approx\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\Delta\varphi_k^2}{24}\right)\Delta\varphi_k\end{cases} \tag{20}$$

只要给定初始时刻飞行器的姿态, 便可以递推出任意时刻飞行器的姿态.

在等效转动矢量 $\Delta\varphi_k$ 已知的情况下, 四元数算法与 Rodrigues 参数的第二推广形式算法的计算量比较如表1所示. 需要注意的是在统计计算量时考虑了四元数的规范化以及 Rodrigues 参数的第二推广形式为避免奇异性而进行的修正. 从表1可以看出, Rodrigues 参数的第二推广形式比四元数算法的计算量小.

表1 两种算法的计算量比较

计算量	四元数	第二推广形式
乘除/次	34	22
加减/次	20	17
开方/次	1	0

4 结论

(1) 提出 Rodrigues 参数的第一推广形式, 它是 Rodrigues 参数的进一步推广, 为统一研究由 Rodrigues 参数推广而来的各种三参数姿态描述方法提供理论基础.

(2) 提出 Rodrigues 参数的第二推广形式, 给出了 Rodrigues 参数的第二推广形式表示的姿态运动学方程, 讨论了避免 Rodrigues 参数的第二推广形式奇异性的方法.

在进一步的研究中, 将深入分析 Rodrigues 参数的第一推广形式的性质, 研究 Rodrigues 参数的第二推广形式在飞行器姿态确定和控制中的应用.

参 考 文 献

1 Bar-Itzhack LY, Oshman Y. Attitude determination from vector observations: quaternion estimation. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1985, 21(1): 128—135

2 Lefferts EJ, Markly FL, Shuster MD. Kalman filter for spacecraft attitude estimation. Journal of Guidance Control and Dynamics, 1982, 5(5): 417—429

3 Markley FL. Attitude representations for Kalman filtering. In:

Spencer DB, Seybold CC, Misra AK, et al. eds. Astrodynamics 2001. Quebec, 2001. San Diego: Univelt, 2001, 133—151

4 Schaub H, Junkins JL. Stereographic orientation parameters for attitude dynamics: A generalization of the Rodrigues parameters. The Journal of the Astronautical Sciences, 1996, 44(1): 1—19

5 Crassidis JL, Markley FL. Unscented filtering for spacecraft attitude estimation. Journal of Guidance Control and Dynamics, 2003, 26(4): 536—542

6 方 群, 陈记争, 马卫华. 广义Rodrigues参数姿态描述方法. 自然科学进展, 2007, 17(5): 672—677

7 Idan M. Estimation of Rodrigues parameters from vector observations. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1996, 32(2): 578—586

8 周江华, 苗育红, 王明海. 姿态运动的Rodrigues参数描述. 宇航学报, 2004, 25(5): 514—519

9 林玉荣, 邓正隆. 基于Gibbs矢量估计卫星轨道姿态的滤波算法研究. 中国惯性技术学报, 2004, 12(3): 1—6

10 Mortari D, Markley FL, Junkins JL. Optimal linear attitude estimator. In: Kluever CA, Neta B, Hall CD, et al. eds. Spaceflight Mechanics 2000. Clearwater, 2000. San Diego: Univelt, 2000, 465—477

11 程 杨, 杨 涤, 崔祜涛. 利用修正罗德里格参数进行飞行器姿态估计. 飞行力学, 2002, 20(4): 18—21

12 Jiang XY, Ma GF. Spacecraft attitude estimation form vector measurements using particle filter. In: Proceedings of the Fourth International Conference on Machine Learning and Cybernetics. Guangzhou, 2005. Piscataway: IEEE, 2005, 682—687

13 Tsiotras P. Stabilization and optimality results for the attitude control problem. Journal of Guidance Control and Dynamics, 1996, 19(4): 772—779

14 Kim J, Crassidis JL. A comparative study of sliding mode control and time-optimal control. In: AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit. Boston, 1998. Restion: AIAA, 1998, 316—323

15 Akella MR. Rigid body attitude tracking without angular velocity feedback. In: Kluever CA, Neta B, Hall CD, et al. eds. Spaceflight Mechanics 2000. Clearwater, 2000. San Diego: Univelt, 2000, 3—10

16 Lin YY, Lin GL. Robust nonlinear attitude control of spacecraft with flexible structures. In: AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference. Denver, 2000. Restion: AIAA, 2000, 454—477

17 Shuster MD. A survey of attitude representations. Journal of the Astronautical Sciences, 1993, 41(4): 439—517

18 秦永元. 惯性导航. 北京: 科学出版社, 2006, 311—327